

第二节 气体力学基本定律

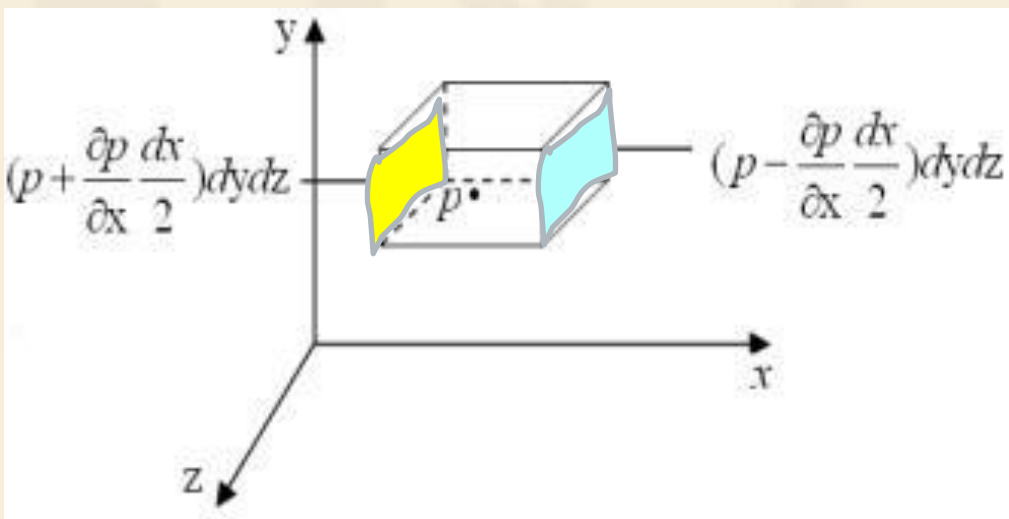
主讲教师：连芳

欧拉平衡微分方程（流体平衡微分方程）

理想流体运动与受力的微分方程式

假设流体是理想流体，流体属性是连续变化的。

在直角坐标系描述的流场中取边长分别为 dx 、 dy 、 dz 的微元立方体



设微元体中心点的压强为 P ，
则在微元体 x 正方向所在的微元面上，
其压强为

$$p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

在微元体 x 负方向所在的微元面上，
其压强为

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

直角坐标微分形式欧拉运动方程的推导

微分方程（流体平衡微分方程）

(F=ma)

该微元体在 x 方向**欧拉平衡**上受到的质量力为 $\rho X dx dy dz$

根据**牛顿第二运动定律**，作用在该微元体 x 方向上全部外力，即表面力和质量力之和，将等于微元体的质量 $\rho dx dy dz$ 与 x 方向上的加速度的乘积 dV_x / dt 。

因此，得到

$$\left(p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy dz + \rho X dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{dV_x}{dt}$$

物理意义：在静止流体内部的任一点上，作用在单位质量流体上的**质量力**和**流体静压强**相平衡。该方程对于**可压缩和不可压缩流体**的平衡和相对平衡状态都适用。

微分方程（流体平衡微分方程）

上式化简后，得到

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dV_x}{dt}$$

这就是理想流体在x方向微分形式动量方程，类似地，在y和z方向同样可以建立起各自方向的运动微分方程：

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{dV_y}{dt} \quad Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dV_z}{dt}$$

上述方程组可以写成矢量形式

$$\mathbf{R} - \frac{1}{\rho} \nabla p = \frac{d\mathbf{V}}{dt}$$

如果将上述方程的两边在直角坐标系中展开，就得到如下的表达式：

直角坐标系中无粘理想流体的欧拉运动方程式

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}$$

$$Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}$$

$$Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

在某些特定条件的限制下，欧拉运动方程可以得到积分解

在定常流中，流线和迹线重合，流线方程可以写为：

$$\mathbf{V} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

表明在流线上每一点的速度矢量与该点的切线矢量平行，该方程在直角坐标系中可以写成下列形式

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z}$$

即

$$V_x dy = V_y dx$$

$$V_y dz = V_z dy$$

$$V_z dx = V_x dz$$

如果将欧拉运动微分方程三个方向的方程分别乘以 dx, dy, dz 并引入定常流的条件, 就可以得到下列表达式

$$Xdx - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dx = V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} dx + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} dx + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} dx$$

$$Ydy - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dy = V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} dy + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} dy + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} dy$$

$$Zdz - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} dz = V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} dz + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} dz + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} dz$$

在重力场中的不可压流体, 积分方程得到

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = C$$

常数**C**称为柏努利常数。

在定常流中, 沿着一条流线, 只有一个确定的常数

流体静力学 — 研究流体处于静止时的力学规律的学科

一、静力学基本方程式

重力场作用下的静止流体，将欧拉平衡微分方程式在**密度不变**的情况下进行积分求解，得到静力学基本方程式：

$$p + \rho gz = \text{常数}$$

例1：如图所示空气温度 20°C ，地面（基准）压强为 1atm (101325Pa)。空气标态密度 ρ_{a0} 为 1.293kg/m^3 ，求距离地面 0.7m 处气体压强？

解：首先根据公式 $\rho_t/\rho_o=T_o/T_t$ ，求出空气在 20°C 时的密度：

$$\rho_a=1.293 \times 273/293=1.21\text{kg/m}^3$$

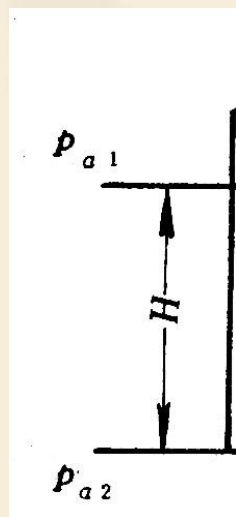
其次，根据基本方程式求出气体压强：

气体静力学方程： $p_{a2}=p_{a1}+\rho_a gH$

$$p_{a1}=p_{a2}-\rho_a gH=101325-$$

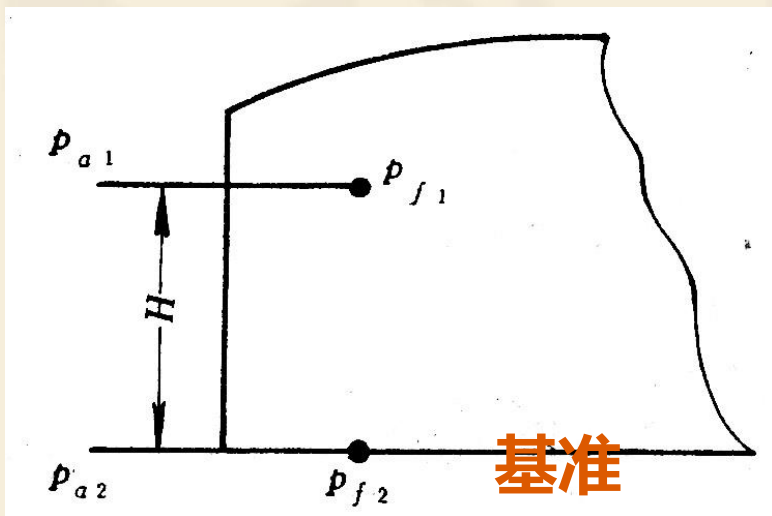
$$1.21 \times 9.81 \times 0.7=101317\text{Pa}$$

答：距地面 0.7m 处压强为 101317Pa 。



基准

例2：如图所示的窑炉，内部充满热烟气，温度为1000℃，烟气标态密度 ρ_{f0} 为1.30kg/m³，窑外空气温度20℃，空气标态密度 ρ_{a0} 为1.293kg/m³，窑底内外压强相等，均为1atm(101325Pa)。求距离窑底0.7m处窑内、外气体压强各多大？其相对压强多大？



解：同样根据公式 $\rho_t/\rho_o=T_o/T_t$ ，求出烟气在1000℃时的密度：

$$\rho_f = 1.30 \times 273 / (273 + 1000) = 0.28 \text{ kg/m}^3$$

其次，根据基本方程式求出气体压强：

气体静力学方程： $p_{a2} = p_{a1} + \rho_a g H$

同样 $p_{f1} = p_{f2} - \rho_f g H = 101325 -$

$$0.28 \times 9.81 \times 0.7 = 101323 \text{ Pa}$$

最后，距窑底0.7m处相对压强

$$p_{f1} - p_{a1} = 101323 - 101317 = 6 \text{ Pa}。$$

三、柏努利方程式

伯努利方程反映了理想流体作定常流动时，流体在流管中各处的流速、压强和高度之间的关系。

则：

$$F_1 = P_1 S_1$$

作正功

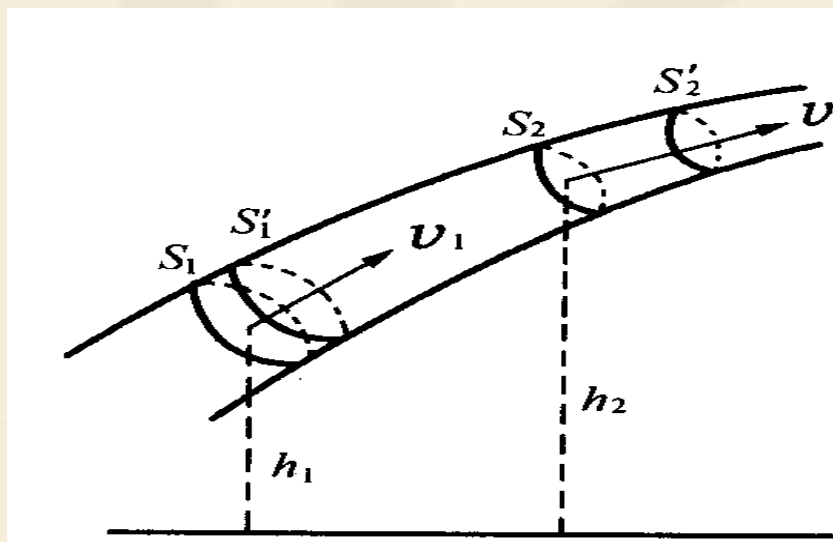
$$F_2 = P_2 S_2$$

作负功

外力对系统所作的总功为：

$$\begin{aligned} A &= F_1 v_1 \Delta t - F_2 v_2 \Delta t \\ &= P_1 S_1 v_1 \Delta t - P_2 S_2 v_2 \Delta t \end{aligned}$$

则：
$$A = P_1 V - P_2 V$$



根据功能原理，设 $S_1 S_1'$ 段流体的机械能为 E_1 ， $S_2 S_2'$ 段流体的机械能为 E_2 ， $S_1 S_1'$ 段和 $S_2 S_2'$ 段流体的质量相等并用 m 表示，因此机械能的增量 ΔE 为：

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2\right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1\right)$$

由功能原理得：

$$A = \Delta E$$

$$P_1 V - P_2 V = \left(\frac{1}{2} m v_2^2 + mgh_2\right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + mgh_1\right)$$

移相，以 V 除各项得

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2$$

对同一流管中的任一垂直截面有：

$$P + \frac{1}{2} \rho v^2 + \rho g h = \text{常量}$$

上式称为伯努利方程，它说明理想流体在流管中作定常流动时，单位体积的动能、重力势能以及该点的压强之和为一常量。

上式中的三项都具有压强的量纲，其中： $\frac{1}{2}\rho v^2$ 项与流速有关，常称为动压头； P 与流速无关，常称之为静压头； $\rho g h$ 被称为几何压头。

伯努利方程仅适用于理想流体作定常流动。

例3 如图1.3，风机吸入口直径200mm，压力测量计测得水柱高度40mm，空气密度 1.2kg/m^3 ，不计气体流动过程的能量损失，求风机的风量？

解：选取图中I—I、II—II截面，列出柏努利方程式：

$$p_1 + \rho g z_1 + \rho u_1^2 / 2 = p_2 + \rho g z_2 + \rho u_2^2 / 2$$

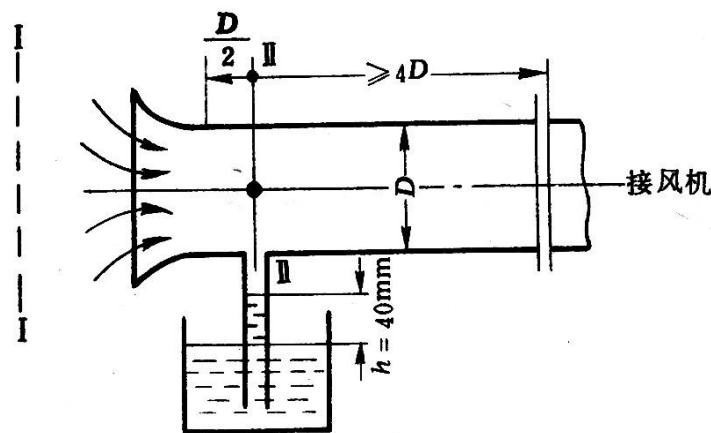
因I、II截面处于同一高度， $z_1 = z_2$ ；

空气静止 $u_1 = 0$ ；

得到： $p_1 = p_2 + \rho u_2^2 / 2$

因为 P_1 为大气压强， $p_2 = p_1 - 40 \times 9.81 = p_1 - 392.4$ ，
所以有 $\rho u_2^2 / 2 = 392.4$ ， $u_2 = (392.4 \times 2 / 1.2)^{0.5} = 25.6\text{m/s}$

流量 $Q = uF = 25.6 \times \pi \times (0.2/2)^2 = 0.804\text{ m}^3/\text{s}$ 。



四、两气体的柏努利方程

1. 关于两气体柏努利方程式的推导

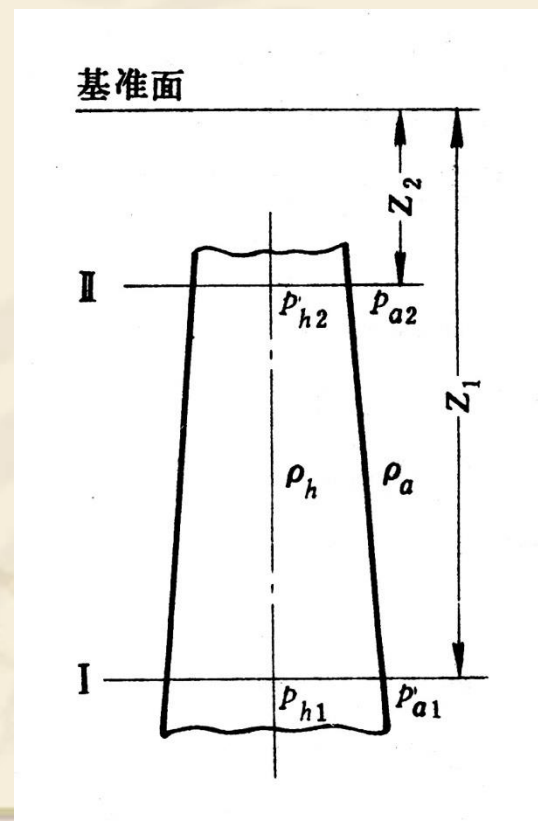
适合于冷热两种气体同时存在，而又反映它们之间相互作用的柏努利方程式，该简称为两气体柏努利方程式。

$$\begin{aligned} \text{窑内热烟气 } p_{h1} + \rho_h g z_1 + 1/2 \rho_h u_1^2 \\ = p_{h2} + \rho_h g z_2 + 1/2 \rho_h u_2^2 \end{aligned}$$

$$\text{窑外冷空气 } p_{a1} + \rho_a g z_1 = p_{a2} + \rho_a g z_2$$

两式相减，方程式为：

$$\begin{aligned} (p_{h1} - p_{a1}) + g z_1 (\rho_h - \rho_a) + 1/2 \rho_h u_1^2 \\ = (p_{h2} - p_{a2}) + g z_2 (\rho_h - \rho_a) + 1/2 \rho_h u_2^2 \end{aligned}$$



2. 压头概念

- (1) 相对静压头 h_s ; $h_s = p_h - p_a$, 表示单位体积气体所具有的相对压力能, 在数值上等于容器内外, 同一高度的压强差, J/m^3 , 或Pa;
- (2) 相对几何压头 h_g ; $h_g = Hg(\rho_a - \rho_h)$, 表示单位体积气体所具有的相对位能, 实质上是相对位能, J/m^3 , 或Pa;
- (3) 动压头 h_k ; $h_k = \rho_h u^2 / 2$, 表示单位体积气体所具有的动能, J/m^3 , 或Pa
- (4) **压头损失** h_l ; 表示单位体积气体流动时的能量损失, 它包括摩擦阻力损失、局部阻力损失和其它阻力损失。

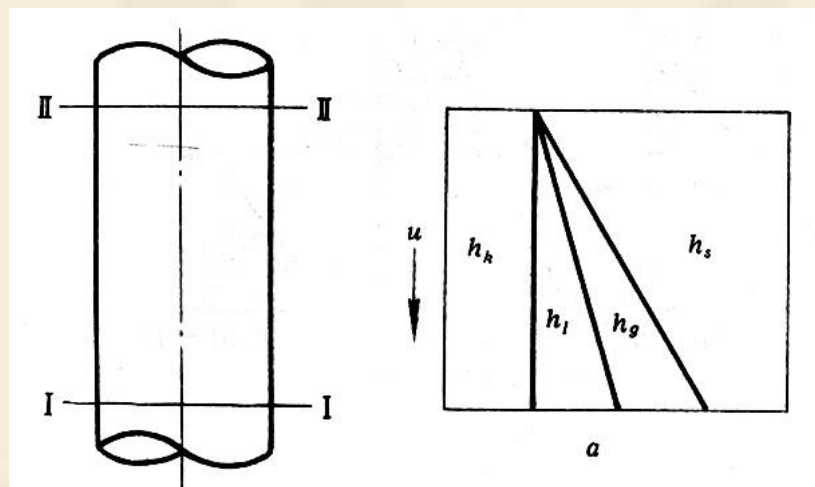
3. 各压头之间可相互转换

热气体在垂直管道中运动，当其运动方向不同时，由于何压头所起的作用不同，致使压头间的相互转换关系也不同。

a. 由上向下运动 基准面

基准面取在Ⅱ—Ⅱ截面上

图 热气体在垂直管道中运动时
压头间的相互转换



气体在管道内由Ⅱ—Ⅱ截面向Ⅰ—Ⅰ截面流动的柏努利方程式

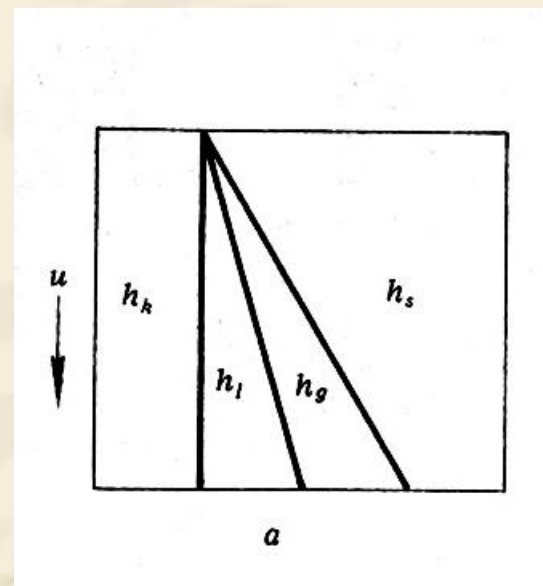
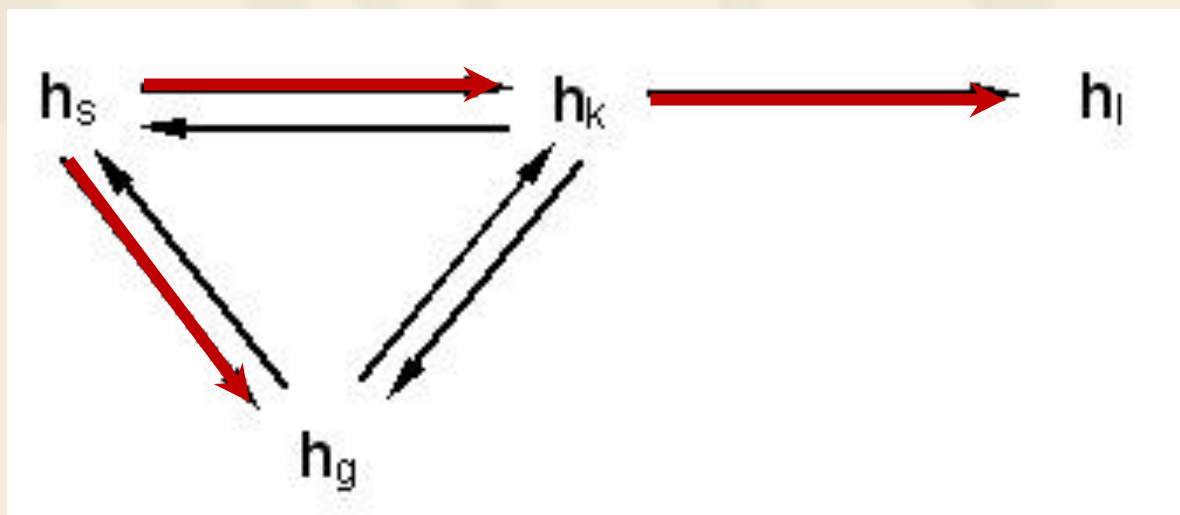
$$h_{s2} + h_{g2} + h_{k2} = h_{s1} + h_{g1} + h_{k1} + h_{l2-1}$$

由于管道截面未发生变化，动压头不变， $h_{k2} = h_{k1}$

又因基准面取在Ⅱ—Ⅱ截面上， $h_{g2}=0$ 。

所以
$$h_{s2} = h_{s1} + h_{g1} + h_{l2-1}$$

当热气体由上往下运动时，动压头转变为压头损失，部分静压头转变为动压头，使动压头保持不变。同时，部分静压头又转变为几何压头，最后使I—I面静压头减少。各压头之间转换关系如图所示，动压头转换为压头损失是不可逆的。

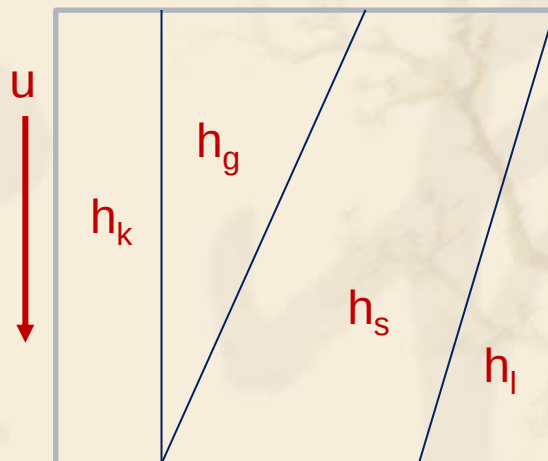
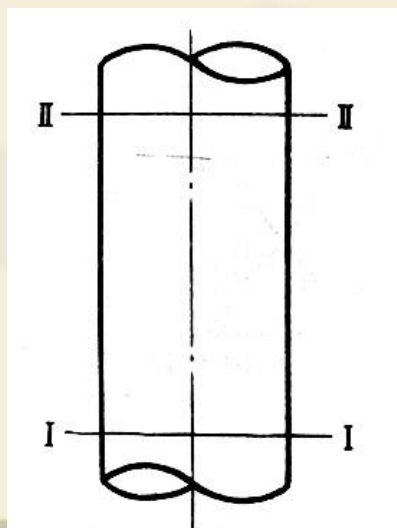
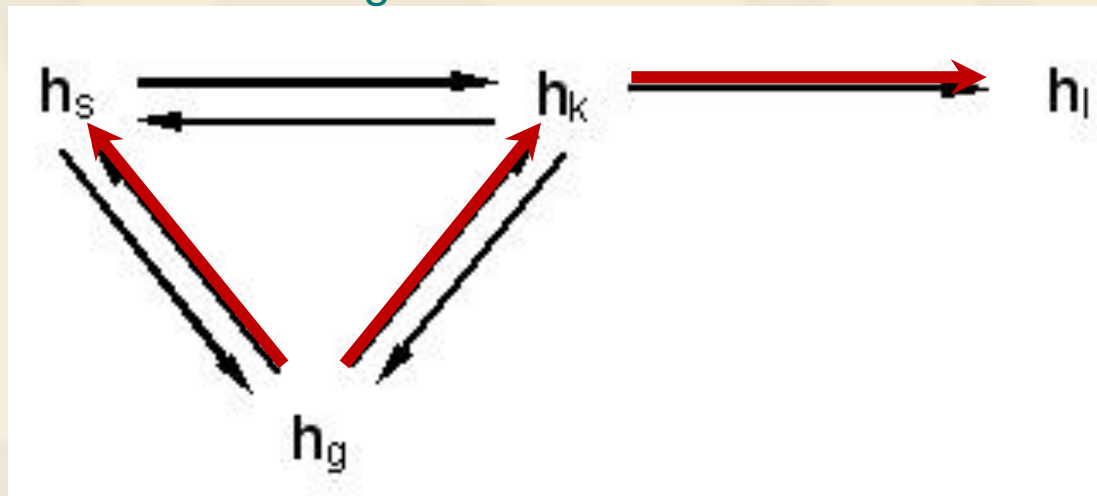


动压头之间的转换

由上向下运动

但 基准面取在 I — I 截面上, $h_{g1}=0$

$$h_{s2} + h_{g2} = h_{s1} + h_{l2-1}$$



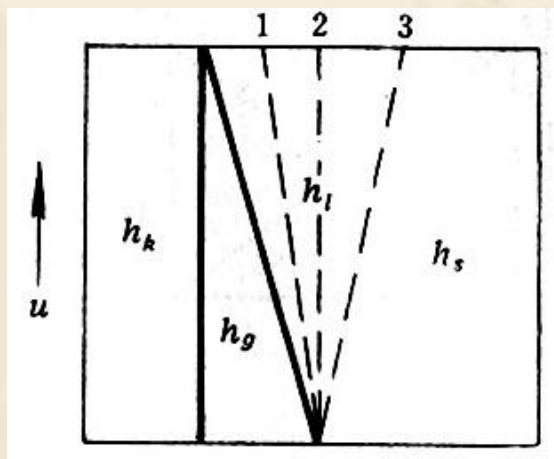
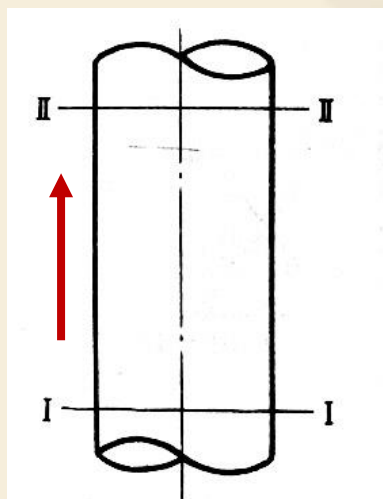
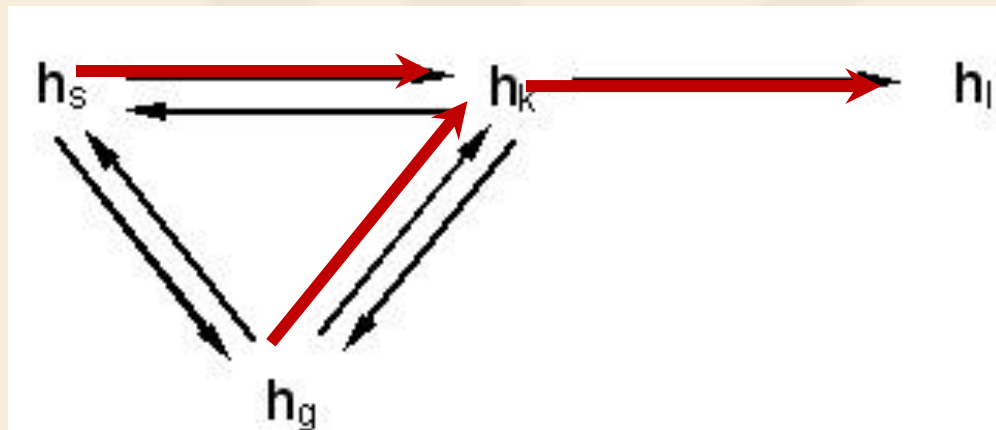
(b) 当热气体由下向上运动时，气体在管道内由I—I截面向II—II截面流动的柏努利方程式

基准面取在II—II截面上

$$h_{s1} + h_{g1} + h_{k1} = h_{s2} + h_{g2} + h_{k2} + h_{l1-2}$$

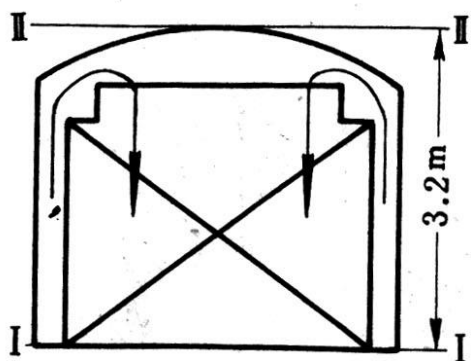
同样有 $h_{k1} = h_{k2}$, $h_{g2} = 0$,

所以 $h_{s1} + h_{g1} = h_{s2} + h_{l1-2}$



例4 如图1.7所示倒焰窑，高3.2m，窑内烟气温度为1200℃，烟气标态密度 $\rho_{f,0}=1.3\text{kg/m}^3$ ，外界空气温度20℃，空气标态密度 $\rho_{a,0}=1.293\text{kg/m}^3$ ，当窑底平面的相对静压头为0Pa，-17Pa，-30Pa时，不计流体阻力损失，求三种情况下，窑顶以下空间静压头，几何压头分布状况。

基准面
选择在窑顶II—II截面上



解：根据题意分析，由于窑炉空间气体流速不大，可近似采用两气体静力学方程式进行计算。
列出静力学方程式

$$h_{s1} + h_{g1} = h_{s2} + h_{g2}$$

由于基准面取在截面II上， $h_{g2} = 0$

$$h_{s1} + h_{g1} = h_{s2}$$

代入具体公式进行计算：

$$h_{g1} = Hg(\rho_a - \rho_f)$$

$$\rho_a = \rho_{a,0} \cdot T_0 / T = 1.293 \times 273 / 293 = 1.20 \text{kg/m}^3$$

$$\rho_f = \rho_{f,0} \cdot T_0 / T = 1.30 \times 273 / 1473 = 0.24 \text{kg/m}^3$$

$$h_{g1} = 3.2 \times 9.81 \times (1.20 - 0.24) = 30 \text{Pa}$$

当 $h_{s1} = 0$ 时, $h_{s2} = h_{g1} = 30\text{Pa}$

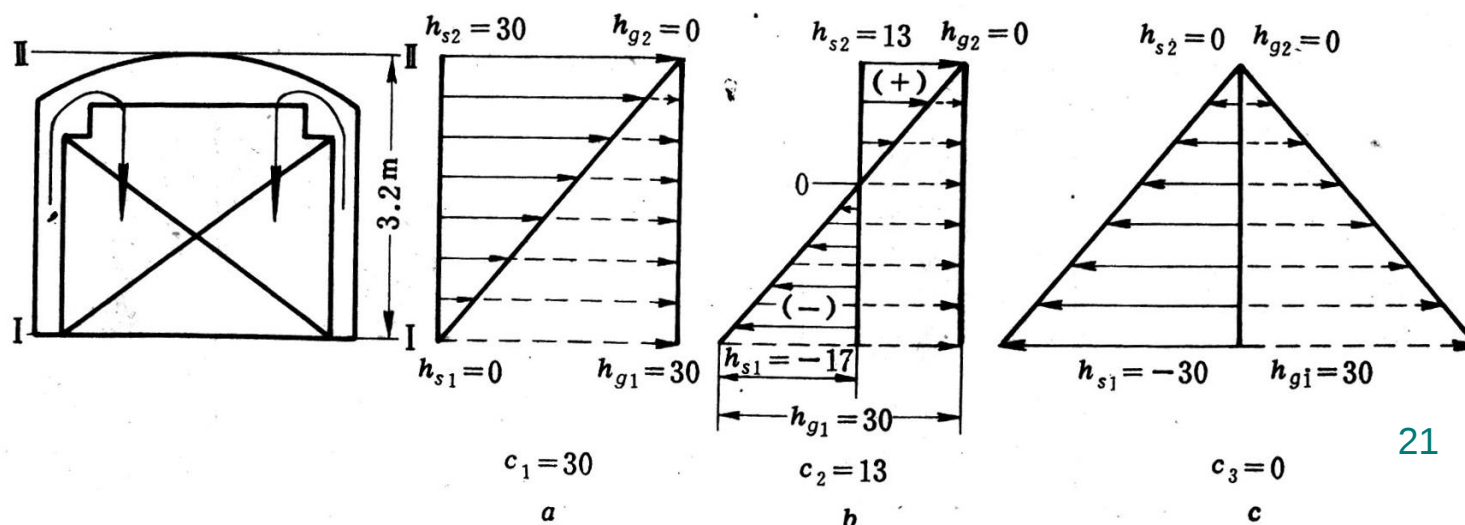
在第一种情况下, 窑炉空间的静压头、几何压头分布如图1.7a所示。其能量总和为: $h_s + h_g = c_1 = 30\text{Pa}$

当 $h_{s1} = -17$ 时, $h_{s2} = -17 + 30 = 13\text{Pa}$

在第二种情况下, 窑炉空间的静压头、几何压头分布如图1.7b所示。其能量总和为: $h_s + h_g = c_2 = 13\text{Pa}$

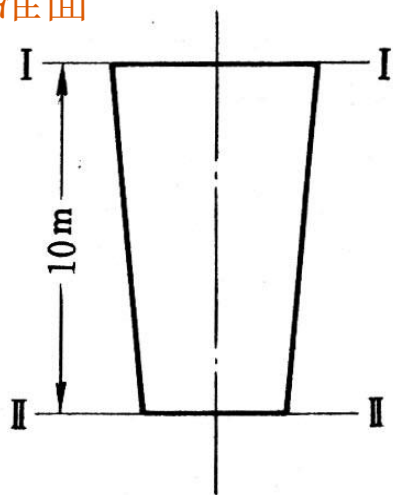
当 $h_{s1} = -30$ 时, $h_{s2} = -30 + 30 = 0\text{Pa}$

在第三种情况下, 窑炉空间的静压头、几何压头分布如图1.7c所示。其能量总和为: $h_s + h_g = c_3 = 0$



例5 热气体沿竖直管道流动，如图所示，密度 $\rho_h = 0.75\text{kg/m}^3$ ，外界空气密度 1.2kg/m^3 ，I—I面动压头 12Pa ，II—II面动压头 30Pa ，沿程压头损失 15Pa ，I—I面相对静压头 200Pa ，求气体由上而下运动和气体由下而上运动II—II的相对静压头为多少？绘出两种情况的能量分布图。

基准面



例题5附图

解：气体由上而下流动 $h_{s1} + h_{g1} + h_{k1} = h_{s2} + h_{g2} + h_{k2} + h_{l1-2}$

选I—I为基准面， $h_{g1} = 0$

$$h_{s1} - h_{s2} = h_{g2} + (h_{k2} - h_{k1}) + h_{l1-2}$$

$$200 - h_{s2} = 10g(1.2 - 0.75) + (30 - 12) + 15$$

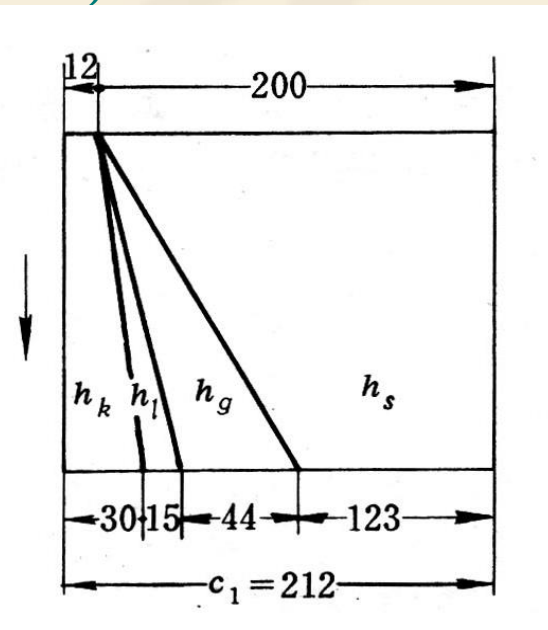
$$h_{s2} = 123\text{Pa}$$

其压头能量转换关系为：

$$h_s \rightarrow h_k \rightarrow h_l$$

$$\downarrow$$

$$h_g$$



解： 气体由下而上流动，有： $h_{s2} + h_{g2} + h_{k2} = h_{s1} + h_{g1} + h_{k1} + h_{l2-1}$

选I—I为基准面， $h_{g1} = 0$

则： $h_{s1} - h_{s2} = h_{g2} + (h_{k2} - h_{k1}) - h_{l2-1}$

$$200 - h_{s2} = 10g(1.2 - 0.75) + (30 - 12) - 15;$$

$$h_{s2} = 153 \text{ Pa}$$

其压头能量转换关系为：

$$\begin{array}{c} h_k \rightarrow h_l \\ \downarrow \\ h_g \rightarrow h_s \end{array}$$

基准面

